である。これらで，ようやくmBH方程式系の解が完全に記述することができて，（予想通り）GM（2, ∞）でパラメトライズされていることがわかる。

r成分KP系に対して，そのm切断をとると，その解空間がGM（rm，∞）となることは容易に想像できる。多成分系の場合，時間が直交しているように見えるので，各時間軸に対し，m切断を行うことが可能かを検討することが課題である。可能ならば，例えば，BH方程式とkdV方程式をカップルさせた方程式が得られるかもしれない。

参考文献

1) Sato, M. and Sato, Y.: Lect. Notes in Num. Appl. Anal. **5**, (1984) 259.

2) Harada, H.: J. Phys. Soc. Jpn. **54**, (1985) 4507.

3) Harada, H. and Oishi, S.: 準 備 中

自由端をもつ非線形格子

戸 田 盛 和

無限長あるいは周期的な非線形格子，およびこれらの特殊な場合と考えることもできる両端固定の非線形格子はくわしく調べられているが，自由端をもつ非線形格子はほとんど研究されていない。

著者らが考察したいわゆるchopping現象は自由端をもつ体系の一つの性質である。この場合はある距離以上にはなれると粒子間の相互作用はゼロになるとしたので，この現象は1次元系に凝縮相がないため，粒子がばらばらになって行く過程と考えることができる。

さて，今回は一端が固定され他端が自由な非線形格子を扱う。前回にはその結果だけを報告したが，今回は問題を整理してみたいと思う。

§1 自由端をもつ格子の分配関数

1次元格子で相互作用を$\phi(r)$とし，左端は固定され，右端は自由であるとする。全粒子数をN，粒子の変位をx_j（$j=1, 2, \cdots, N$）とすれば，全系の位置エネルギーは

$$U=\phi(x_1)+\phi(x_2-x_1)+\cdots+\phi(x_N-x_{N-1})$$

これに関する分配関数を$Q_N(\beta)$とすれば，

$$Q_N(\beta)=\int\cdots\int e^{-\beta U}dx_1\ \cdots\ dx_N=Q(\beta)^N$$

ここで　$Q(\beta)=\int e^{-\beta\phi(r)}dr$ となる。

非線形ポテンシャル

$$\phi(r)=e^{-r}-1+r\quad(-\infty<r<\infty)$$

を採用すると

$$Q(\beta)=\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\exp\left[-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log\{1-\exp(-2\pi\beta\tan\theta)\}\,d\theta\right] \tag{1}$$

となる（証明は§2）。ここで公式

$$\exp\left[\int_0^1\log f(x)\,dx\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{r=1}^{n}f\left(\frac{r}{\pi}\right)\right]^{1/n}$$

を用いると

$$Q(\beta)=\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\lim_{n\to\infty}\prod_{r=1}^{n}\{1-\exp(-2\pi\beta\tan\frac{\pi r}{2\pi})\}^{-1/2n}$$

を得る。

したがって N を十分大きくとれば

$$Q(\beta)\simeq\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\prod_{r=1}^{N}\{1-\exp(-2\pi\beta\tan\frac{\pi r}{2N}\}^{-1/2N} \tag{2}$$

が十分よい近似で成立する。前回はこの式を数値的に証明しておいた。

(2)式から次のことがいえる。粒子数を N でなく $2N$ とすると

$$Q_{2N}(\beta)=\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^N\prod_{r=1}^{N}\{1-\exp(-2\pi\beta\ \tan\frac{\pi r}{2N})\}^{-1}$$

あるいは

$$Q_{2N}(\beta)=\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^N\prod_{r=1}^{N}q_r(\beta)$$

ここで

$$q_r(\beta)=\sum_{n_r=0}^{\infty}e^{-\beta n_r\varepsilon_r}$$

ただし

$$\varepsilon_r=2\pi\ \tan\frac{\pi r}{2N}$$

を得る。

したがって自由端をもつ格子の励起はエネルギーの『かたまり』ε_rの集団と見ることができる。

§2　式(1)の導出

$$Q(\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\beta\left(e^{-r}-1+r\right)\right]dr=e^{\beta}\beta^{-\beta}\Gamma(\beta)$$

ここで$\Gamma(\beta)$はガンマ関数で周知のように

$$\frac{d^2}{d\beta^2}\log\Gamma(\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta+n)^2}$$

これを用いれば

$$\frac{d^2}{d\beta^2}\log\left\{\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}Q(\beta)\right\}=\frac{1}{2\beta^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\beta+n)^2}-\frac{1}{\beta}$$

を得る。

そこで

$$f(x)=\frac{1}{(\beta+x)^2}$$

の $x=0$ に対する値の半分と $x=1,\ 2,\ \cdots$ に対する値との総和を求めればよい。

ここで $\exp(-2\pi i z)-1$ を考えると，これは $z=0,\ 1,\ 2,\cdots$ でゼロになる。そしてその逆数は複素 z の上半面の無限遠でゼロになる。そこで $z=0,\ 1,\ 2,\cdots$ を小さくまわり，無限遠をまわって虚軸 $z=iy$ に沿って戻る逆時計回りの積分路C_1をとると，この中に極はないから（$z\to n$（整数）で $\exp(-2\pi iz)-1\to -2\pi i(z-n)$）

$$0=\int_{C_1}\frac{f(z)dz}{e^{-2\pi iz}-1}=\frac{1}{4}f(0)+\frac{1}{2}\{f(1)+f(2)+\cdots\}$$

$$+P\int_0^{\infty}\frac{f(x)dx}{e^{-2\pi ix}-1}-i\int_0^{\infty}\frac{f(iy)}{e^{2\pi y}-1}dy$$

となる。同様に下半面をまわる時計回りの積分路C_2について

$$0=\int_{C_2}\frac{f(z)dz}{e^{+2\pi iz}-1}$$

$$=\frac{1}{4}f(0)+\frac{1}{2}\{f(1)+f(2)+\cdots\}+P\int_0^{\infty}\frac{f(x)dx}{e^{+2\pi ix}-1}$$

$$+i\int_0^{\infty}\frac{f(-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy$$

ここで

$$\frac{1}{e^{-2\pi i x}-1}+\frac{1}{e^{2\pi i x}-1}=-1$$

に注意し，上の二式の和を作れば

$$\left\{\frac{1}{2}f(0)+f(1)+\cdots\right\}-\int_0^\infty f(x)\,dx=i\int_0^\infty\frac{f(iy)-f(-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy$$

を得る。これはPlanaの式とよばれるものを簡略化したものになっている。今の場合

$$\int_0^\infty f(x)\,dx=\int_0^\infty\frac{dx}{(\beta+x)^2}=\frac{1}{\beta}$$

$$f(iy)-f(-iy)=\frac{1}{(\beta+iy)^2}-\frac{1}{(\beta-iy)^2}=\frac{-4i\beta y}{(\beta^2+y^2)^2}$$

なので

$$\frac{d^2}{d\beta^2}\left\{\log\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}Q(\beta)\right\}=\int_0^\infty\frac{4\beta y}{(\beta^2+y^2)^2}\,\frac{dy}{e^{2\pi y}-1}$$

を得る。これを2度βについて積分し，$\beta\to\infty$ の値から積分定数がゼロであることを導けば，さらに部分積分して式(1)が得られる。

sine格子方程式とソリトン ―近似的解析解と数値解―

名大・工　本間重雄，　京都工繊大・工　武野正三

非線形格子方程式でソリトン解が求められた例は少ない。そこで我々は新しい格子方程式として次式を提案しこれを解くことを試みた。

$$\ddot{u}_n-\sin(u_{n+1}-u_n)+\sin(u_n-u_{n-1})$$
$$=g(-\sin u_n+\eta\sin 2u_n)\qquad(1)$$

(1)式に連続体近似を用いるとdouble sine-Gordon (d. s. G.) 方程式を得る。

$$u_{tt}-a^2u_{zz}=g(-\sin u+\eta\sin 2u),\qquad(2)$$

aは格子定数で $z_{n+1}-z_n=a$ で定義される。